

文章编号:1008-4584(2004)04-0023-03

对谐振电路中品质因数 Q 值的讨论

管 潇 津

(保定师范专科学校 物理系, 河北 保定 071051)

摘 要:从 Q 值的定义出发, 分别求出了 RLC 串联电路和 RL-C 并联电路的 Q 值. 讨论了相同形式的 Q 值的不同含义及两电路的谐振特性.

关键词:谐振电路; 谐振频率; 品质因数

中图分类号: O441

文献标识码: A

谐振电路在电子技术中有着广泛的应用. 谐振电路的特性与该谐振电路的品质因数(即 Q 值)密切相关. 求 1 个电路的 Q 值应从其定义出发, 才能对 Q 值的意义有更深刻的理解, 对谐振电路的特性有更全面的认识.

1 品质因数的定义

1 个谐振电路的品质因数定义^[1]为

$$Q = 2\pi \frac{W_s}{W_R} \quad (1)$$

其中 W_s 为谐振电路中存储的能量, W_R 为谐振电路每个周期内消耗的能量. Q 值越高能量耗散越少, 亦即谐振电路的储能效率越高. 这是 Q 值的最普遍的意义. (1) 式不仅适用于谐振电路, 也适用于其他一切谐振系统(机械的、电磁的、光学的, 等等).

2 RLC 串联谐振电路

RLC 串联电路如图 1 所示.

设通过该电路的电流为

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t, \quad (2)$$

则电容两端的电压为

$$u_c = \sqrt{2} \frac{I}{\omega C} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -\sqrt{2} \frac{I}{\omega C} \cos \omega t, \quad (3)$$

1 个周期内电阻消耗的能量为 $W_R = I^2 RT$, (4)

电感元件储存的能量为 $W_L = \frac{1}{2} Li^2$, (5)

电容元件储存的能量为 $W_C = \frac{1}{2} Cu_c^2$, (6)

电路中储存的总能量为

$$W_s = W_L + W_C = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_c^2 = I^2 (L \sin^2 \omega t + \frac{1}{\omega^2 C} \cos^2 \omega t). \quad (7)$$

当电路发生谐振时 $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 即 $\frac{1}{\omega_0^2 C} = L$,

$$\text{所以 } W_s = LI^2 = \frac{I^2}{\omega_0^2 C}. \quad (8)$$

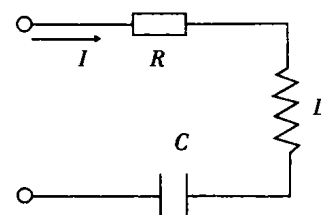


图 1 RLC 串联电路

收稿日期:2004-10-11

作者简介:管潇津(1965-),男,河北望都人,副教授.

将式(4)、(8)代入式(1)得 RLC 串联电路的品质因数为

$$Q = 2\pi \frac{W_s}{W_R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (9)$$

3 RL-C 并联电路

RL-C 并联电路如图 2 所示.

该电路的复导纳为

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C. \quad (10)$$

谐振时

$$\omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0, \quad (11)$$

$$\text{由(11)式得 } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}}. \quad (12)$$

当 $R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 即 $\frac{CR^2}{L} \ll 1$ 时, $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 此时 $\omega_0 L \gg R$,

设电源电压为 $u = \sqrt{2} U \sin \omega_0 t$,

RL 支路的复阻抗为 $Z = R + j\omega_0 L = ze^{j\varphi}$,

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega_0 L)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega_0 L}{R}.$$

由于 $\omega_0 L \gg R$, 所以 $z \approx \omega_0 L$, $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$.

$$\text{RL 支路的电流为 } i = \sqrt{2} \frac{U}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = -\sqrt{2} \frac{U}{\omega_0 L} \cos \omega_0 t, \quad (14)$$

$$1 \text{ 个周期内电路中电阻消耗的能量为 } W_R = \frac{U^2}{(\omega_0 L)^2} RT. \quad (15)$$

电路中储存的总能量为

$$W_s = W_L + W_C = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_c^2 = U^2 \left[\frac{1}{\omega^2 L} \cos^2 \omega_0 t + C \sin^2 \omega_0 t \right], \quad (16)$$

谐振时 $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 即 $C = \frac{1}{\omega_0^2 L}$,

$$\text{所以 } W_s = \frac{U^2}{(\omega_0^2 L)^2} = U^2 C. \quad (17)$$

将式(15)、(17)代入式(1)得 RL-C 并联电路的品质因数为

$$Q = 2\pi \frac{W_s}{W_R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (18)$$

RL-C 并联电路的谐振频率又可表示为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}. \quad (19)$$

4 关于 Q 值的讨论

对 RL-C 谐振电路, 还可以将 RL 串联支路等效变换为 RL 并联电路. 等效的 RL 并联支路的复导纳为

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (20)$$

其等效电阻 R' 和等效电感 L' 分别为

$$R' = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R}, \quad (21)$$

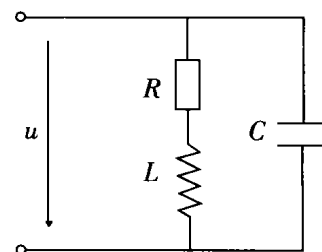


图 2 RL-C 并联电路

$$L' = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{\omega^2 L}. \quad (22)$$

谐振时 $\omega = \omega_0$, $\omega_0 L \gg R$, 则 $R' \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R}$, $L' \approx L$.

根据 RLC 并联谐振电路 Q 值的计算公式, 也得到 RL - C 谐振电路的品质因数为

$$Q = \frac{R'}{\omega_0 L'} = \frac{(\omega_0 L)^2}{R} \cdot \frac{1}{\omega_0 L} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (23)$$

RLC 串联电路的品质因数与 RL - C 并联电路的品质因数虽然在形式上是相同的, 但它们的谐振特性并不相同^[2,3]. 如: RLC 串联电路谐振时, 阻抗最小 $z = R$, 若激励为恒压源, 则电路中电流达到最大; 而 RL - C 并联电路谐振时, 导纳最小, 阻抗最大 $z = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R}$, 若激励为恒流源, 则电路两端的电压达到最大.

如果用同样参数的 R 、 L 和 C 元件分别组成 RLC 串联电路和 RL - C 并联电路, 前者只要电源频率 $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 电路就会发生谐振; 而后者必须满足条件 $R < \sqrt{\frac{L}{C}}$ 电路才可能发生谐振, 且谐振角频率比前者谐振角频率低.

只有当时 $Q \gg 1$ 时, $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

5 结语

通过以上分析可知, RLC 串联谐振电路的 Q 值为 $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$; RLC 并联谐振电路的 Q 值为 $Q = \frac{R}{\omega_0 L}$; RL - C 并联谐振电路的 Q 值为 $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$.

虽然 RLC 并联谐振电路的 Q 值与 RL - C 并联谐振电路的 Q 值互为倒数, 但是它们之间并不存在本质的联系. 同样, RL - C 并联电路的 Q 值与 RLC 串联电路的 Q 值形式相同, 它们之间也不存在本质的联系, 只是形式上相同而已, 不能认为 RL - C 并联电路的 Q 值就是 RLC 串联电路的 Q 值, 也不能认为 RL - C 并联电路的 Q 值就是 RLC 并联电路的 Q 值倒数. 各种电路的品质因数完全由其电路的结构和性质决定, 必需通过其定义来确定.

参考文献:

- [1] 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学(下册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985. 723 ~ 724.
- [2] 廖玄九, 郭木森. 电工学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979. 60 ~ 67, 83 ~ 87.
- [3] 石生. 电路基础分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000. 126 ~ 133.

The Discussion of Quality Factor in Resonant Circuit

GUAN Xiao-jin

(Department of Physics, Baoding Teachers College, Baoding 071051, China)

Abstract: The quality factor of RLC series resonance and RL - C current resonance were calculated from the definition of it. Although the forms both of the circuits are in same, but the characteristic of the circuits isn't identity. So the different meanings of quality factors in same form were discussed.

Key words: resonant circuit; resonant frequency; quality factor